SISTEM PERTIDAKSAMAAN DUA VARIABEL

MATEMATIKA UMUM KELAS X

PENYUSUN
Yenni Dian Anggraini, S.Pd.,M.Pd.,MBA.

SMA Negeri 9 Kendari

DAFTAR ISI

PENYUSUN 2
DAFTAR ISI 3
GLOSARIUM 4
PETA KONSEP 5
PENDAHULUAN 6
A. Identitas Modul 6
B. Kompetensi Dasar 6
C. Deskripsi Singkat Materi 6
D. Petunjuk Penggunaan Modul 6
E. Materi Pembelajaran 7
KEGIATAN PEMBELAJARAN 1 8
SISTEM PERTIDAKSAMAAN DUA VARIABEL LINEAR-KUADRAT 8
A. Tujuan Pembelajaran 8
B. Uraian Materi 8
C. Rangkuman 13
D. Latihan Soal 14
E. Penilaian Diri 18
KEGIATAN PEMBELAJARAN 2 19
SISTEM PERTIDAKSAMAAN DUA VARIABEL KUADRAT-KUADRAT 19
A. Tujuan Pembelajaran 19
B. Uraian Materi 19
C. Rangkuman 22
D. Latihan Soal 22
E. Penilaian Diri 28
EVALUASI 29
DAFTAR PUSTAKA 35

GLOSARIUM

Variabel : lambang pengganti suatu bilangan yang belum diketahui nilainya dengan jelas, variabel disebut juga peubah.

Kalimat terbuka : sebuah kalimat yang memiliki variabel atau memuat variabel.

Pertidaksamaan : kalimat terbuka yang menggunakan relasi tidak sama (>, <, ≤, atau ≥).

Pertidaksamaan linear : pertidaksamaan yang setiap sukunya mengandung konstanta dengan variabel berderajat satu.

Pertidaksamaan kuadrat : pertidaksamaan yang setiap sukunya mengandung konstanta dengan variabel berderajat dua.

Pertidaksamaan linear dua variabel : pertidaksamaan linear yang memiliki dua variabel.

Pertidaksamaan kuadrat dua variabel : pertidaksamaan kuadrat yang memiliki dua variabel.

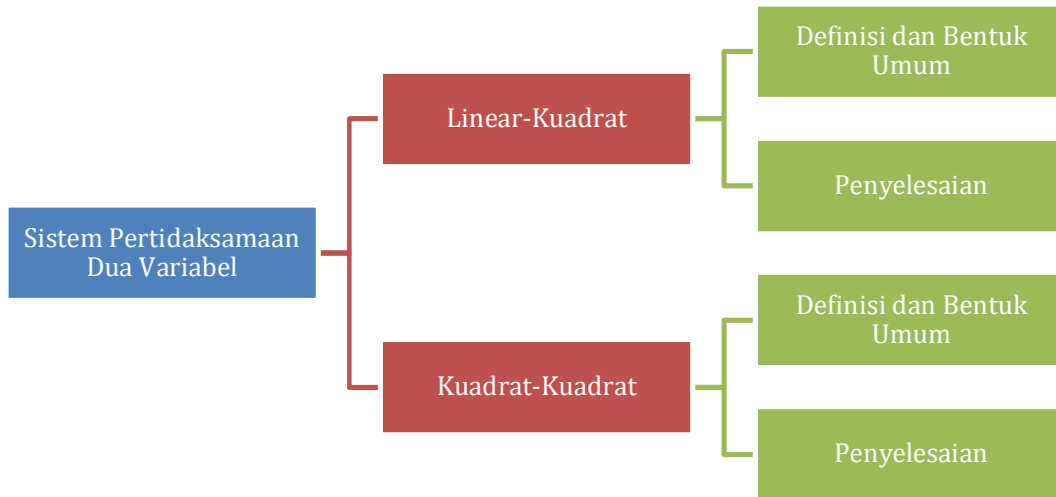
Sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat atau SPtDVLK : kumpulan beberapa pertidaksamaan yang sedikitnya memuat satu pertidaksamaan linear dan satu pertidaksamaan kuadrat dua variabel.

Sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat atau SPtDVKK : kumpulan beberapa pertidaksamaan yang memuat paling sedikit satu pertidaksamaan kuadrat dua variabel.

Penyelesaian sistem pertidaksamaan dua variabel : perpotongan atau irisan dari beberapa pertidaksamaan yang membentuk sistem tersebut.

Metode grafik : metode yang digunakan untuk melihat secara visual gambaran tentang daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan dua variabel.

PETA KONSEP

Sistem Pertidaksamaan Dua Variabel
Linear-Kuadrat
Definisi dan Bentuk Umum
Penyelesaian
Kuadrat-Kuadrat
Definisi dan Bentuk Umum
Penyelesaian

PENDAHULUAN

A. Identitas Modul

Mata Pelajaran : Matematika Umum
Kelas : X (Sepuluh)
Alokasi Waktu : 8 JP
Judul Modul : Sistem Pertidaksamaan Dua Variabel

B. Kompetensi Dasar

3.4 Menjelaskan dan menentukan penyelesaian sistem pertidaksamaan dua variabel (linear-kuadrat dan kuadrat-kuadrat)

4.4 Menyajikan dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan sistem pertidaksamaan dua variabel (linear-kuadrat dan kuadrat-kuadrat)

C. Deskripsi Singkat Materi

Pada modul ini peserta didik akan mempelajari konsep, penyelesaian dan penerapan sistem pertidaksamaan dua variabel (SPtDV). Sistem pertidaksamaan dua variabel pada materi kali ini terdiri atas sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat dan sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat. Untuk mempelajari modul ini, para peserta didik diharapkan telah menguasai dasar-dasar pemfaktoran, penyelesaian persamaan dan pertidaksamaan linear serta penyelesaian persamaan dan pertidaksamaan kuadrat. Selain penjelasan mengenai materi yang ditampilkan, modul ini juga dilengkapi dengan latihan untuk menguji pemahaman dan penguasaan dari peserta didik terhadap materi yang telah dipelajari. Modul ini disusun dengan bahasa yang sederhana, contoh-contoh yang kontekstual, dan dibuat berurutan sesuai dengan urutan materi yang terlebih dahulu perlu dikuasai. Setelah memahami materi ini peserta didik diharapkan dapat menentukan penyelesaian SPtDV dan menerapkan pada permasalahan dalam kehidupan sehari-hari.

D. Petunjuk Penggunaan Modul

Untuk mempelajari modul ini hal-hal yang perlu dilakukan oleh peserta didik adalah sebagai berikut.

1. Membaca pendahuluan modul untuk mengetahui arah pengembangan modul.
2. Membaca kompetensi dasar dan tujuan yang ingin dicapai melalui modul.
3. Membaca dan memahami peta konsep agar memperoleh gambaran yang utuh mengenai modul.
4. Mempelajari modul secara berurutan agar memperoleh pemahaman yang utuh.
5. Memahami contoh-contoh soal yang ada, dan mengerjakan semua soal latihan yang ada.
6. Mempelajari kembalih materi yang terkait jika dalam mengerjakan soal menemui kesulitan.
7. Mengikuti semua tahapan dan petunjuk yang ada pada modul ini.
8. Mempersiapkan alat tulis untuk mengerjakan soal-soal latihan.
9. Selamat belajar menggunakan modul ini, semoga bermanfaat.

E. Materi Pembelajaran

Modul ini terbagi menjadi **2** kegiatan pembelajaran dan di dalamnya terdapat uraian materi, contoh soal, soal latihan, dan soal evaluasi.

Pertama : Sistem Pertidaksamaan Dua Variabel Linear–Kuadrat

Kedua : Sistem Pertidaksamaan Dua Variabel Kuadrat–Kuadrat

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
SISTEM PERTIDAKSAMAAN DUA VARIABEL LINEAR-KUADRAT

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan peserta didik mampu:

1. Menjelaskan definisi dan bentuk umum sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat.
2. Menjelaskan penyelesaian sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat.
3. Menyatakan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari ke dalam bentuk sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat.
4. Menentukan penyelesaian sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat.

B. Uraian Materi

1. Definisi dan Bentuk Umum

Peserta didik sekalian, masih ingatkah kalian dengan materi sistem persamaan linear tiga variabel pada modul sebelumnya? Pasti masih ingat bukan? Kalian dapat sampai ke modul ini berarti kalian telah melewati kegiatan pembelajaran di modul sebelumnya dengan baik. Mengapa kalian harus mengingat kembali materi tersebut? Karena materi yang akan kalian pelajari di modul ini sangat berkaitan dengan materi sistem persamaan linear tiga variabel. Bagaimana keterkaitannya? Pasti kalian penasaran bukan? Untuk menjawab rasa penasaran kalian silahkan menyimak uraian berikut.

Sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat atau SPtDVLK adalah kumpulan beberapa pertidaksamaan yang sedikitnya memuat satu pertidaksamaan linear dan satu pertidaksamaan kuadrat dua variabel. Bentuk umum SPtDVLK adalah sebagai berikut.

$$\begin{cases} y * ax + b \\ y * px^2 + qx + r \end{cases}$$ dengan * adalah tanda pertidaksamaan (<, >, ≤, ≥)

Keterangan:

- Variabel adalah x dan y
- Koefisien adalah a, p dan q
- Konstanta adalah b dan r

Contoh: bentuk-bentuk sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat:

i. $$\begin{cases} y \geq 3x + 6 \\ y \leq x^2 + 5x + 6 \end{cases}$$

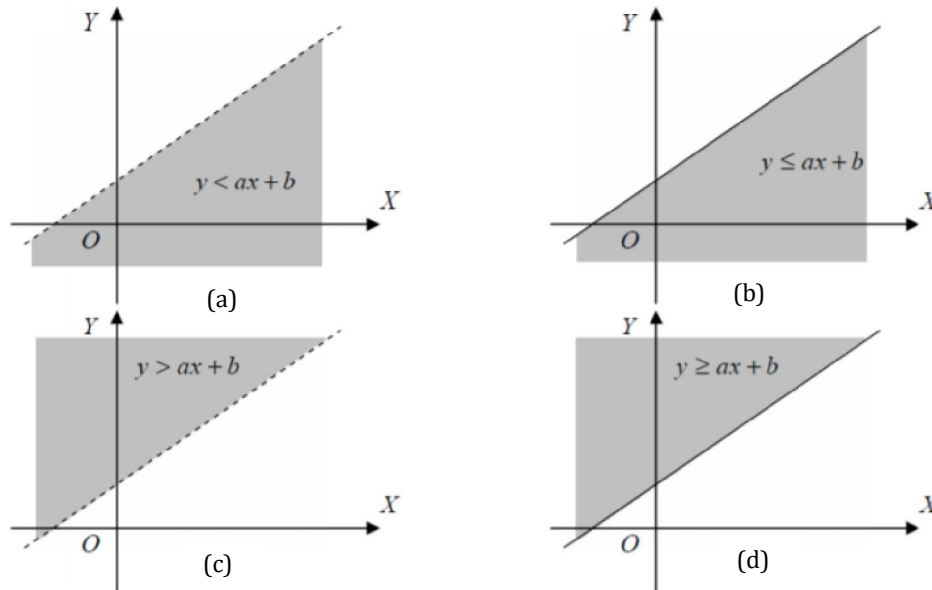
ii. $$\begin{cases} y + 9 \geq 3x \\ y \leq x^2 - x - 6 \end{cases}$$

Apakah kalian sudah mulai memahami konsep sistem pertidaksamaan linear kuadrat? Jika belum kalian dapat mengulang kembali membaca materi tersebut. Tetap semangat dan jangan cepat putus asa ya.

2. Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Dua Variabel linear-kuadrat

1) Penyelesaian Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Peserta didik sekalian, setelah kalian mempelajari dan memahami definisi serta bentuk sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat atau SPtDVLK maka kalian dapat melanjutkan ke materi penyelesaian SPtDVLK. Namun sebelumnya kalian harus mampu menentukan daerah himpunan penyelesaian dari suatu pertidaksamaan linier dua variabel dan daerah himpunan penyelesaian dari suatu pertidaksamaan kuadrat dua variabel.

Grafik pertidaksamaan linier dua variabel adalah himpunan semua titik pada sistem koordinat Kartesius yang memenuhi sistem tersebut. Grafik ini biasanya digambarkan sebagai suatu daerah yang diarsir pada sistem koordinat yang dinamakan daerah himpunan penyelesaian. Salah satu cara untuk menentukan daerah penyelesaian pertidaksamaan linear dua variabel adalah dengan menggunakan metode grafik. Pada gambar diperlihatkan berbagai tipe grafik atau daerah himpunan penyelesaian dari suatu pertidaksamaan linier dua variabel.

Gambar 1. Berbagai Tipe Daerah Himpunan Penyelesaian dari Suatu PtLDV
(Sumber: https://smazapo.sch.id/UKBM/)

Jika garis $y = ax + b$ sebagai garis batas tidak termasuk pada daerah himpunan penyelesaiannya (daerah yang diarsir), maka garis ini digambarkan terputus-putus (Gambar 1 (a) dan (c)). Tetapi jika garis $y = ax + b$ sebagai garis batas termasuk dalam daerah himpunan penyelesaiannya (daerah yang diarsir), maka garis ini digambarkan dengan garis yang tidak terputus-putus (Gambar 1 (b) dan (d)).
Peserta didik sekalian, apakah kalian semakin paham? Untuk lebih jelasnya cermati contoh soal berikut ini.

Contoh:

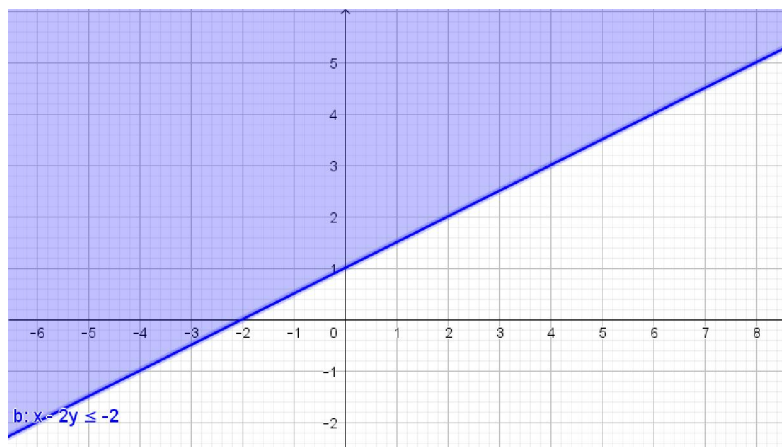
Tentukan grafik atau daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan linier dua variabel $x - 2y \le -2$.

Alternatif Penyelesaian:

Terdapat beberapa langkah untuk menggambar daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan linier dua variabel $x - 2y \le -2$, ialah sebagai berikut.

1. Terlebih dahulu menggambar garis $x - 2y \le -2$.
2. Buatlah tabel nilai-nilai $x - 2y = -2$ atau $x = 2y - 2$.

x	– 2	0
y	0	1
(x,y)	(–2, 0)	(0, 1)

3. Pilih sembarang titik, misal (0,0), substitusikan ke pertidaksamaan $x - 2y \le -2$, diperoleh $0 < -2$ (tidak memenuhi) sehingga titik (0,0) tidak terletak di daerah penyelesaian.
4. Garisnya tidak putus-putus karena memuat tanda sama dengan (=).
5. Langkah berikutnya adalah menentukan daerah mana yang termasuk dalam daerah $x - 2y \le -2$ dengan memberikan arsiran pada daerah tersebut.

Gambar 2. Daerah Himpunan Penyelesaian PtLDV $x - 2y \le -2$

Bagaimana, mudah bukan untuk menggambar daerah himpunan penyelesaian PtLDV? Jika kalian belum memahami dengan baik, silahkan mengulang kembali mempelajari materi PtLDV. Untuk menambah wawasan kalian dapat mencari referensi dari sumber bacaan lain.

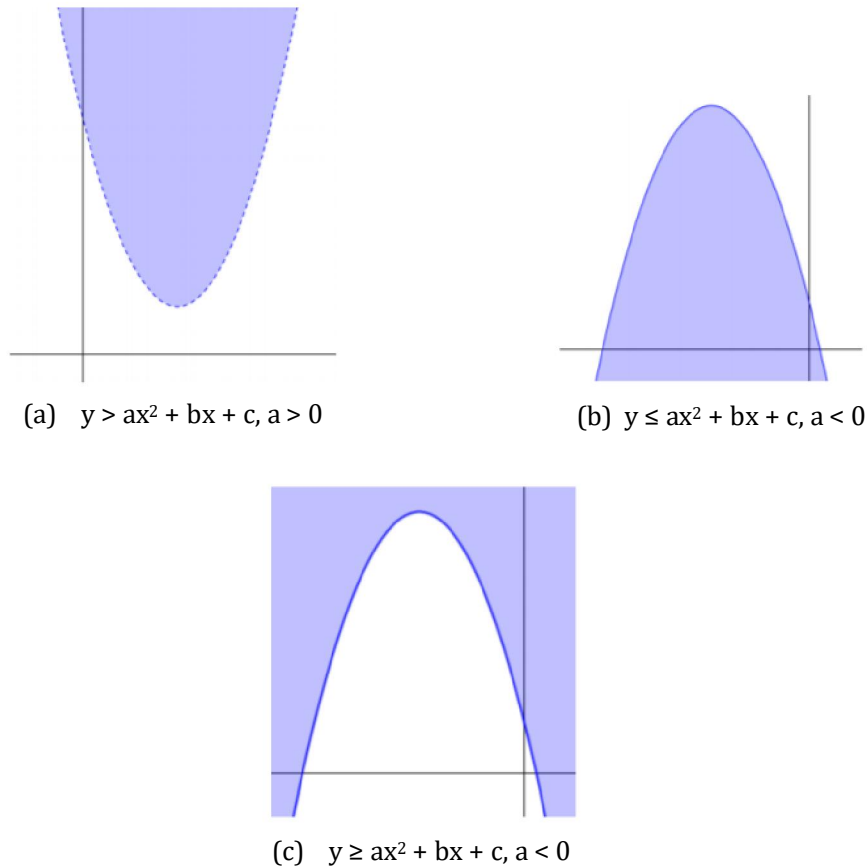
2) Penyelesaian Pertidaksamaan Kuadrat Dua Variabel

Peserta didik sekalian, setelah kalian mempelajari dan memahami penyelesaian pertidaksamaan linear dua variabel (PtLDV) maka kalian dapat melanjutkan ke materi penyelesaian pertidaksamaan kuadrat dua variabel (PtKDV). Selanjutnya kalian dapat melanjutkan menentukan daerah himpunan penyelesaian dari suatu sistem pertidaksamaan linier kuadrat dua variabel (SPtDVLK).

Grafik pertidaksamaan kuadrat dua variabel adalah himpunan semua titik pada sistem koordinat Kartesius yang memenuhi sistem tersebut. Grafik ini biasanya digambarkan sebagai suatu daerah yang diarsir pada sistem koordinat yang dinamakan daerah

himpunan penyelesaian. Pada gambar diperlihatkan berbagai model-model daerah penyelesaian pertidaksamaan kuadrat dua variabel.

(a) $y > ax^2 + bx + c, a > 0$ (b) $y \leq ax^2 + bx + c, a < 0$

(c) $y \geq ax^2 + bx + c, a < 0$

Gambar 3. Beberapa Model Daerah Himpunan Penyelesaian dari Suatu PtKDV
(Sumber: https://smazapo.sch.id/UKBM/)

Peserta didik sekalian, apakah kalian semakin paham? Untuk lebih jelasnya cermati contoh soal berikut ini.

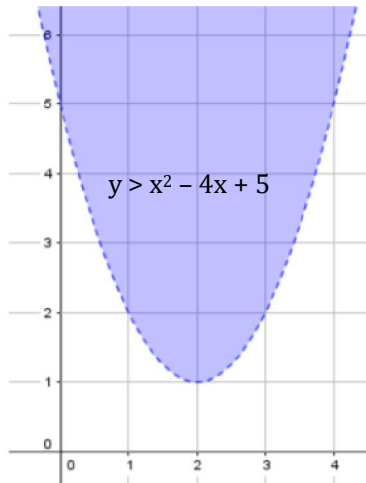
Contoh:

Tentukan grafik atau daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan kuadrat dua variabel $y > x^2 - 4x + 5$.

Alternatif Penyelesaian:

Terdapat beberapa langkah untuk menggambar daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan kuadrat dua variabel $y > x^2 - 4x + 5$, ialah sebagai berikut.

1. Tentukan arah kurva terbuka ke atas atau ke bawah di lihat dari koefisien x^2, karena $a > 0$ maka kurva terbuka ke atas.
2. Sketsa , tentukan titik potong dengan sumbu x jika ada, karena $D < 0$, maka kurva tidak memiliki titik potong dengan sumbu x.
3. Tentukan titik puncak dari kurva.

$$(x_p, y_p) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$$
$$= \left(-\frac{(-4)}{2}, -\frac{(-4)}{4}\right)$$
$$= (2, 1)$$

Gambar 4. Daerah Himpunan Penyelesaian PtKDV $y > x^2 - 4x + 5$

Bagaimana, mudah bukan untuk menggambar daerah himpunan penyelesaian PtKDV? Jika kalian belum memahami dengan baik, silahkan mengulang kembali mempelajari materi PtKDV. Jangan lupa untuk selalu menambah wawasan kalian dengan mencari referensi dari sumber lain.

3) Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Dua Variabel linear-kuadrat

Peserta didik sekalian, bagaimana dengan materi sebelumnya? Sangat menantang bukan? Apakah kalian semakin penasaran? Baiklah, selanjutnya kita akan mempelajari penyelesaian sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat (SPtDVLK). Metode yang digunakan untuk menyelesaiak sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat adalah metode grafik. Grafik sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat adalah himpunan semua titik pada sistem koordinat Kartesius yang memenuhi sistem tersebut. Grafik ini biasanya digambarkan sebagai suatu daerah yang diarsir pada sistem koordinat yang dinamakan daerah himpunan penyelesaian. Agar lebih jelas, cermati contoh soal berikut.

Contoh:

Tentukan grafik atau daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan dua variabel (linier-kuadrat) $\begin{cases} -x + y \leq 1 \\ y \geq x^2 - 4x + 1 \end{cases}$

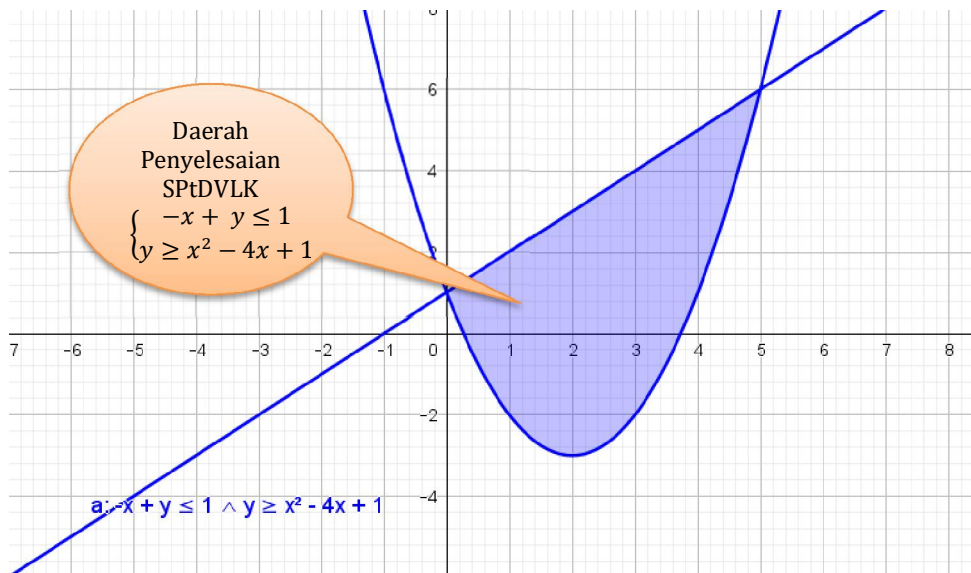
Alternatif Penyelesaian:

Dengan menerapkan langkah-langkah menentukan daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan linier dan pertidaksamaan kuadrat dua variabel diperoleh:

1. Terlebih dahulu menggambar garis $-x + y = 1$.
2. Buatlah tabel nilai-nilai $-x + y = 1$.

x	– 1	0
y	0	1
(x,y)	(–2, 0)	(0, 1)

3. Pilih sembarang titik, misal (0,0), substitusikan ke pertidaksamaan $-x + y \leq 1$, diperoleh 0 < 1 (memenuhi) sehingga titik (0,0) terletak di daerah penyelesaian.
4. Garisnya tidak putus-putus karena memuat tanda sama dengan (=).

5. Langkah berikutnya adalah menentukan daerah mana yang termasuk dalam daerah $-x + y \leq 1$ dengan memberikan arsiran pada daerah tersebut.
6. Menentukan titik potong dengan sumbu x, y = 0 untuk $y = x^2 - 4x + 1$, diperoleh (0,26;0) dan (3,72;0)
7. Menentukan titik potong dengan sumbu y, x = 0 untuk $y = x^2 - 4x + 1$, diperoleh (0, 1).
8. Tentukan titik kurva $y = x^2 - 4x + 1$, diperoleh
$$(x_p, y_p) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$$
$$= (-\frac{(-4)}{2}, -\frac{12}{4})$$
$$= (2, -3)$$
9. Karena a > 0 maka kurva terbuka ke atas, sehingga daerah arsiran untuk $y = x^2 - 4x + 1$ ada di dalam parabola.
10. Irisan daerah penyelesaian dari $-x + y \leq 1$ dan $y \geq x^2 - 4x + 1$ diperlihatkan oleh gambar yang diarsir.

Cukup menantang bukan? Menurut kalian permasalahan apa dalam kehidupan sehari-hari yang membutuhkan penerapan SPtDVLK? Mengapa? Nah agar kalian lebih termotivasi lagi mempelajari materi ini, silahkan mengerjakan soal-soal latihan di bawah ini.

C. Rangkuman

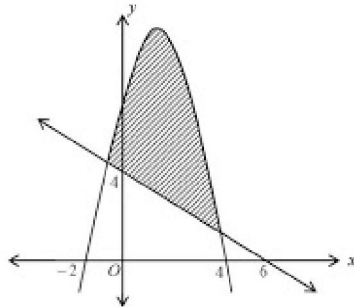
1. Sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat (SPtDVLK) adalah kumpulan beberapa pertidaksamaan yang sedikitnya memuat satu pertidaksamaan linear dan satu pertidaksamaan kuadrat dua variabel.
2. Bentuk umum SPtDVLK adalah sebagai berikut.
$\begin{cases} y * ax + b \\ y * px^2 + qx + r \end{cases}$ dengan * adalah tanda pertidaksamaan (<, >, ≤, ≥)

D. Latihan Soal

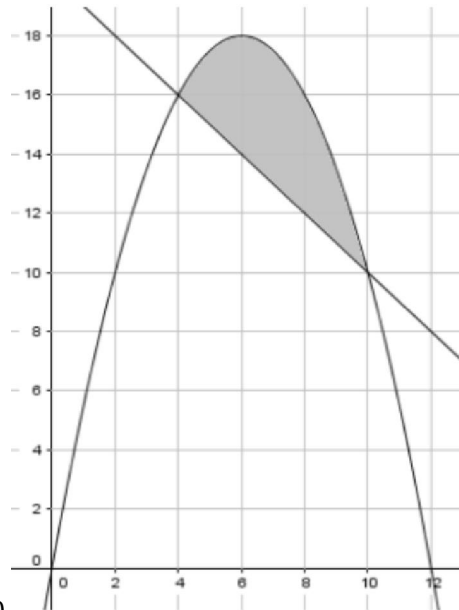
Soal Essay

1. Tentukan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $2x + 3y \geq 12$ dan $y \leq -x^2 + 2x + 8$ pada bidang kartesius.
2. Pada harga Rp s per satuan, departemen pemasaran dalam suatu perusahaan tekstil memperkirakan bahwa biaya mingguan B dan pendapatan P akan diberikan persamaan-persamaan di bawah ini:
   $P = 20 - s$ (dalam ribuan rupiah) → persamaan biaya produksi
   $B = 6s - 0.5s^2$ (dalam ribuan rupiah) → persamaan pendapatan
   Pertanyaan:
   a. Dalam kondisi bagaimanakah perusahaan memperoleh keuntungan?
   b. Berapa harga satuan yang akan membuat perusahaan memperoleh keuntungan?

Kunci dan Pembahasan

Kunci Soal Essay

1.

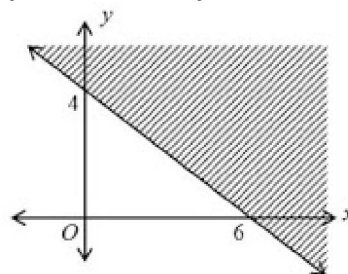
2. (a)

$$\begin{cases} C \geq 20 - s \\ R \leq 6s - 0{,}5s^2 \end{cases}$$

(b)

Pembahasan

1. Alternatif Penyelesaian:
   Pertama akan digambar daerah penyelesaian 2x + 3y ≥ 12

   2x + 3y = 12

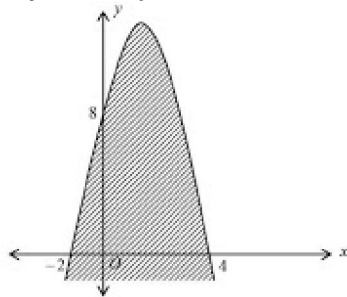
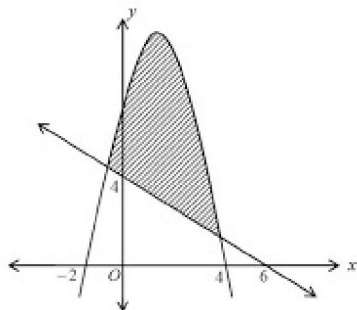
x	y	(x, y)
0	4	(0, 4)
6	0	(6, 0)

   Selanjutnya digambar juga daerah penyelesaian $y \leq -x^2 + 2x + 8$, dengan langkah langkah :

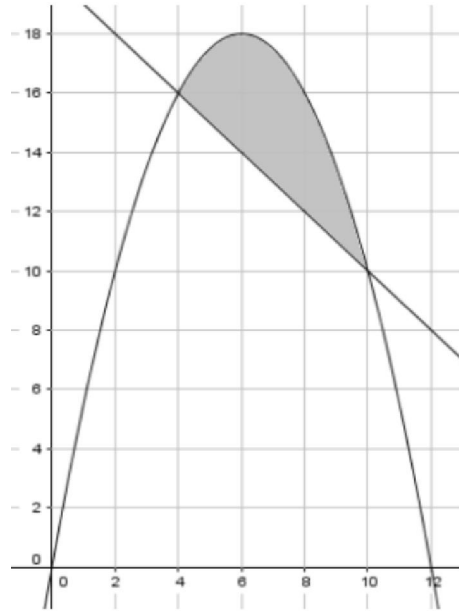
Menentukan titik potong dengan sumbu-X syarat y = 0
$-x^2 + 2x + 8 = 0$
$x^2 - 2x - 8 = 0$
$(x - 4)(x + 2) = 0$
x = –2 dan x = 4 . Titik potongnya (–2 0) dan (4, 0)

Menentukan tititk potong dengan sumbu-Y syarat x = 0
$y = -x^2 + 2x + 8$
$y = -(0)^2 + 2(0) + 8$
y = 8 . Titik potongnya (0, 8)

Menentukan titik maksimum fungsi $y = -x^2 + 2x + 8$

$$(x_p, y_p) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$$
$$= \left(\frac{2}{2}, \frac{36}{4}\right)$$
$$= (1, 9)$$

Menggambar daerah penyelesaiannya (daerah yang diarsir adalah daerah penyelesaian).

Irisan dari kedua daerah penyelesaian tersebut merupakan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $\begin{cases} 2x + 3y \geq 12 \\ y \leq -x^2 + 2x + 8 \end{cases}$. Gambar daerahnya adalah sebagai berikut:

(Skor: 50)

2. Alternatif Penyelesaian:
   (a) Perusahaan memperoleh keuntungan apabila pendapatan lebih besar dari biaya produksi. Dengan demikian, sistem persamaan di atas diubah dalam bentuk sistem pertidaksamaan yaitu $\begin{cases} P \geq 20 - s \\ B \leq 6s - 0{,}5s^2 \end{cases}$
   (b) Daerah penyelesaian untuk sistem pertidaksamaan di atas adalah:

Dengan demikian harga satuan yang akan membuat perusahaan tekstil memperoleh keuntungan adalah :
$4 \leq s \leq 10$ (dalam ribuan rupiah)

(Skor: 50)

Nilai Latihan soal ini adalah: Jumlah semua skor yang diperoleh di setiap nomor.

E. Penilaian Diri

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
1	Apakah Saya telah memahami definisi SPtDVLK?	Ya	Tidak
2	Apakah Saya telah memahami memahami bentuk umum SPtDVLK?	Ya	Tidak
3	Apakah Saya dapat menentukan daerah penyelesaian PtLDV?	Ya	Tidak
4	Apakah Saya dapat menentukan daerah penyelesaian PtKDV?	Ya	Tidak
5	Apakah Saya dapat menentukan daerah penyelesaian SPtDVLK?	Ya	Tidak

Bila ada jawaban "Tidak", maka segeralah kalian lakukan review pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak"

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
SISTEM PERTIDAKSAMAAN DUA VARIABEL KUADRAT-KUADRAT

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan peserta didik mampu:

1. Menjelaskan definisi dan bentuk umum sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat.
2. Menjelaskan penyelesaian sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat.
3. Menyatakan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari ke dalam bentuk sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat.
4. Menentukan penyelesaian sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat.

B. Uraian Materi

1. Definisi dan Bentuk Umum

Peserta didik sekalian, setelah kalian mempelajari SPtDVLK maka kalian pasti akan lebih mudah untuk mempelajari materi sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat atau SPtDVKK. Mengapa demikian? Hal ini dikarenakan bentuk umum pertidaksamaannya hampir menyerupai satu dengan yang lain. Yang membedakan adalah SPtDVLK salah satu pertidaksamaannya berbentuk PtLDV sedangkan SPtDVKK semua pertidaksamaannya berbentuk PtKDV. Pasti kalian tertarik bukan untuk mempelajari materi SPtDVKK lebih lanjut. Untuk memenuhi rasa penasaran kalian silahkan mencermati uraian materi berikut.

Sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat atau SPtDVKK adalah kumpulan beberapa pertidaksamaan yang memuat lebih dari satu pertidaksamaan kuadrat dua variabel. Sehingga bentuk umumnya adalah sebagai berikut.

$$\begin{cases} y * ax^2 + bx + c \\ y * px^2 + qx + r \end{cases}$$ dengan * adalah tanda pertidaksamaan (<, >, ≤, ≥)

Keterangan:

- Variabel adalah x dan y
- Koefisien adalah a, b, p dan q
- Konstanta adalah c dan r

Contoh: bentuk-bentuk sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat:

i. $\begin{cases} y \geq 3x^2 + 6x \\ y \leq x^2 + 5x + 6 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} y + 12 \geq 3x^2 \\ y \geq x^2 - x - 6 \end{cases}$

Apakah kalian sudah mulai memahami konsep sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat? Jika belum kalian dapat mengulang kembali membaca materi tersebut. Tetap semangat dan jangan cepat putus asa ya.

2. Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Dua Variabel Kuadrat-Kuadrat

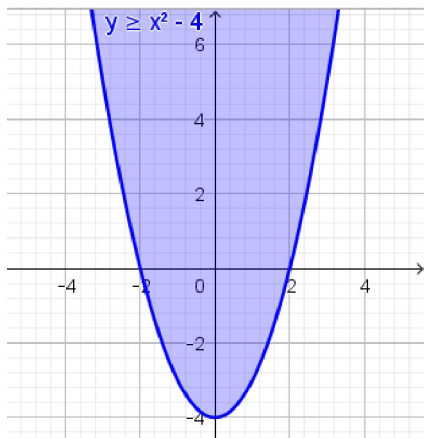
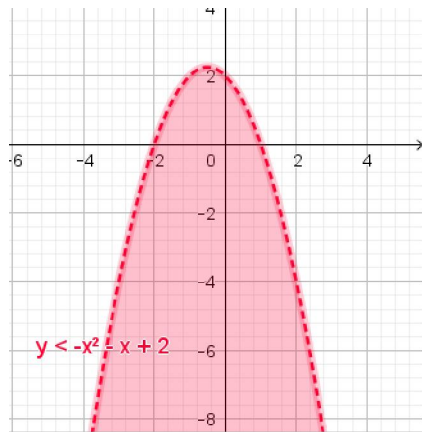
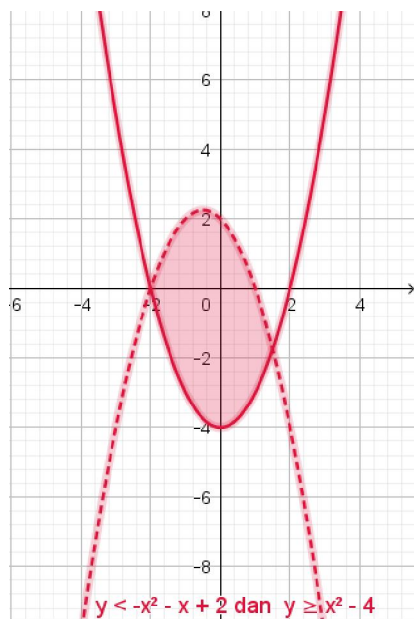
Kalian telah mempelajari cara menggambar daerah penyelesaian pertidaksamaan kuadrat dua variabel. Setelah kalian mampu menentukan daerah penyelesaian pertidaksamaan kuadrat dua variabel, silahkan melanjutkan mempelajari cara menentukan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat. Untuk menyelesaikan sistem pertidaksamaan tersebut, langkah-langkah yang perlu dilakukan adalah sebagai berikut. Metode yang digunakan untuk menyelesaikan sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat adalah metode grafik.

1. Menggambar daerah penyelesaian masing-masing pertidaksamaan dalam sistem tersebut.
2. Mengarsir daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan, yaitu dengan daerah yang merupakan irisan dari daerah penyelesaian semua pertidaksamaan dalam sistem tersebut.

Contoh:
Tentukan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $y \geq x^2 - 4$ dan $y < -x^2 - x + 2$!

Alternatif Penyelesaian:

Langkah-langkah:

1. Menggambar daerah penyelesaian pertidaksamaan $y \geq x^2 - 4$ sebagai berikut.

2. Menggambar daerah penyelesaian pertidaksamaan $y < -x^2 - x + 2$ sebagai berikut.

3. Menentukan irisan dari dua daerah himpunan di atas

4. Daerah yang diarsir pada gambar di atas merupakan daerah penyelesaian yang dimaksud.

Kalian dapat memahami penjelasan di atas bukan? Menurut kalian di mana letak kesulitan dalam menentukan penyelesaian SPtDVKK? Ya, umumnya kesulitan terletak pada teknik menggambar grafik pertidaksamaan kuadrat dua variabel, oleh karena itu kalian harus sering berlatih menggambar grafik tersebut. Kalian harus yakin bahwa semakin banyak berlatih akan meningkatkan ketrampilan kalian dalam menggambar grafik pertidaksamaan kuadrat dua variabel. Untuk itu silahkan melatih diri kalian dengan mengerjakan soal-soal latihan di bawah ini.

C. Rangkuman

1. Sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat (SPtDVKK) adalah kumpulan beberapa pertidaksamaan yang sedikitnya memuat satu pertidaksamaan linear dan satu pertidaksamaan kuadrat dua variabel.
2. Bentuk umum SPtDVKK adalah sebagai berikut.
   $\begin{cases} y * ax^2 + bx + c \\ y * px^2 + qx + r \end{cases}$ dengan * adalah tanda pertidaksamaan (<, >, ≤, ≥)

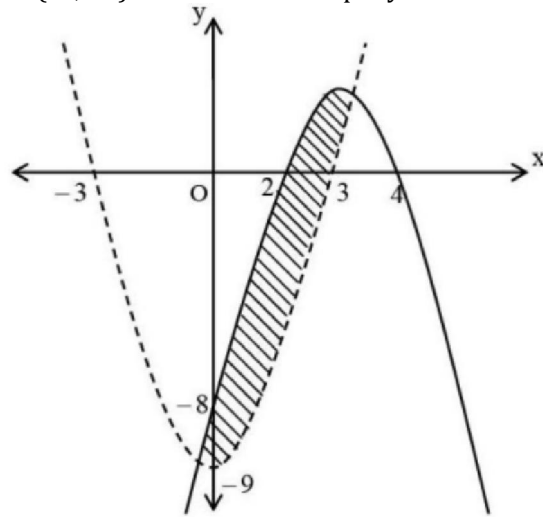
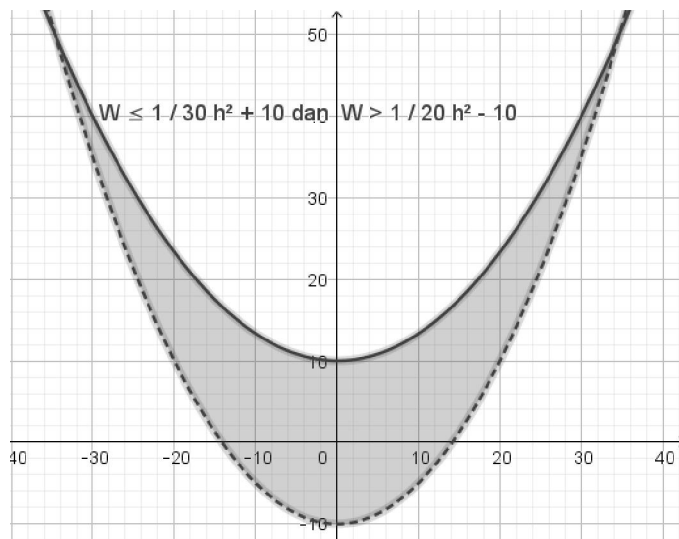
D. Latihan Soal

Soal Essay

1. Dari dua sistem pertidaksamaan berikut, manakah yang berbentuk sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat atau disebut SPtDVKK? Mengapa?
   (a) $\begin{cases} y \leq x^2 - 9 \\ y > 3x + 6 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y \leq x^2 - 8 \\ y > 2x^2 - 1 \end{cases}$
2. Diberikan SPtDVKK berikut $\begin{cases} y \leq 2x^2 - 3x - 5 \\ y > x^2 - 1 \end{cases}$. Apakah titik (−3, 10) merupakan salah satu penyelesaian sistem pertidaksamaan tersebut? Berikanlah penjelasan yang logis!
3. Tentukan daerah penyelesaian dari $y > x^2 - 9$ dan $y \leq -x^2 + 6x - 8$.
4. Berat badan ideal seseorang bergantung pada tinggi bandannya. Seseorang dikatakan memiliki berat badan ideal jika berat badan W (dalam kg) orang tersebut kurang dari atau sama dengan 1/30 kali kuadrat tinggi badan h (dalam cm) orang tersebut ditambah 10 dan lebih dari 1/20 kali kuadrat tinggi badan orang tersebut dikurangi 10. Nyatakan permasalahan tersebut dalam sistem pertidaksamaan dua variabel, kemudian tentukan daerah penyelesaiannya.

Kunci dan Pembahasan

Kunci Soal Essay

1. Bentuk (b) adalah sistem pertidaksamaan dua variabel kuadrat-kuadrat.
2. Titik (−3, 10) adalah salah satu penyelesaian dari SPtDVKK yang dimaksud.
3.

4.

Pembahasan

1. Alternatif Penyelesaian:

(a) $\begin{cases} y \le x^2 - 9 \\ y > 3x + 6 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y \le x^2 - 8 \\ y > 2x^2 - 1 \end{cases}$

Sistem pertidaksamaan dua variabel (b) merupakan SPtDVKK karena kedua pertidaksamaannya berderajat dua (sesuai definisi SPtDVKK), sedangkan sistem

pertidaksamaan bagian (a) hanya terdiri dari satu pertidaksamaan kuadrat dua variabel jadi sesuai deinisi (a) bukan SPtDVKK. (Skor 10)

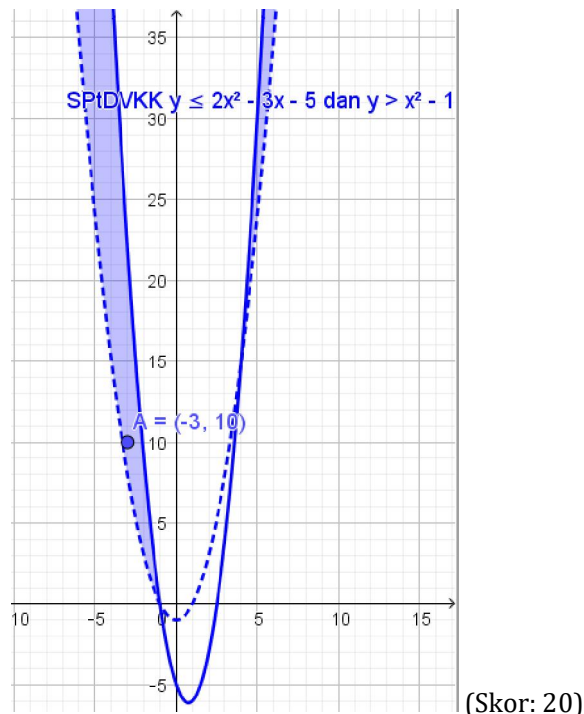
2. Alternatif Penyelesaian:

(i) Substitusikn (–3, 10) ke $y \leq 2x^2 - 3x - 5$ diperoleh:
$10 \leq 2(-3)^2 - 3(-3) - 5$
$10 \leq 22$ (memenuhi/ bernilai benar)

(ii) Substitusikn (–3, 10) ke $y > x^2 - 1$ diperoleh:
$10 > (-3)^2 - 1$
$10 > 8$ (memenuhi/bernilai benar)

Titik (–3, 10) merupakan salah satu penyelesaian sistem pertidaksamaan $\begin{cases} y \leq 2x^2 - 3x - 5 \\ y > x^2 - 1 \end{cases}$ karena jika (–3, 10) di substitusikan pada kedua PtDVK tersebut bernilai benar/memenuhi.

Jika digambarkan dalam koordinat kartesius titik (–3, 10) terletak di daerah penyelesaian SPtDVKK $y \leq 2x^2 - 3x - 5$ dan $y > x^2 - 1$.

(Skor: 20)

3. Alternatif Penyelesaian:

a. Gambar daerah penyelesaian pertidaksamaan $y > x^2 - 9$

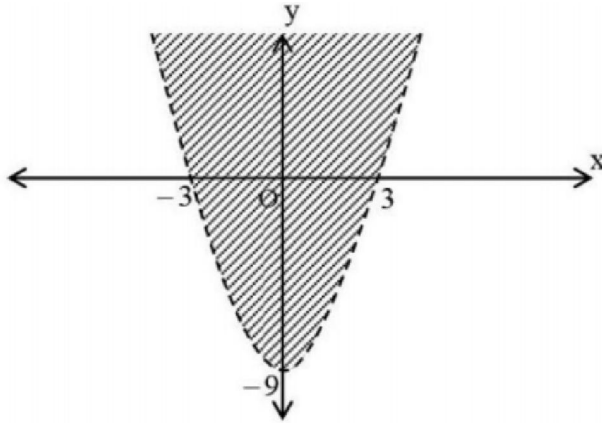
1. Titik potong dengan sumbu-X syarat y = 0
$x^2 - 9 = 0$
$(x + 3)(x - 3) = 0$
$x = -3$ dan $x = 3$
Titik potongnya (–3, 0) dan (3, 0)

2. Titik potong dengan sumbu-Y syarat x = 0
$y = x^2 - 9$

$y = 0^2 - 9$
$y = -9$
Titik potongnya (0, –9)

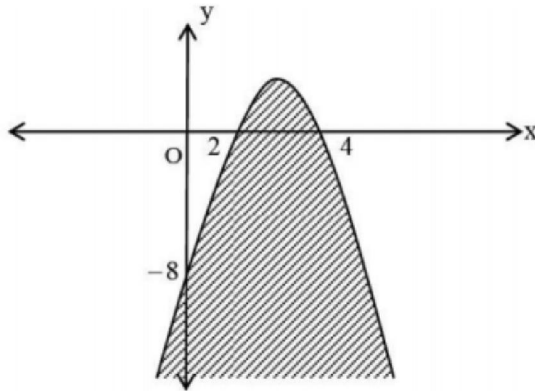
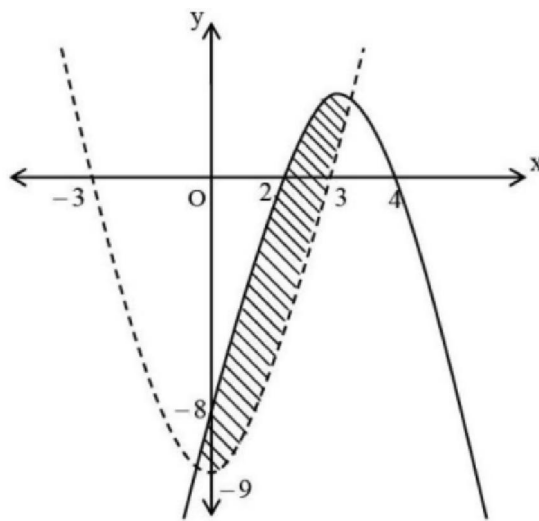
3. Menentukan titik puncak fungsi $y = x^2 - 9$

$$(x_p, y_p) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$$
$$= (\frac{0}{2}, -\frac{(-4).1.(-9)}{4})$$
$$= (1, -9)$$

4. Gambar daerah penyelesaiannya
(Daerah yang diarsir adalah daerah penyelesaian)

b. Gambar daerah penyelesaian pertidaksamaan $y \leq -x^2 + 6x - 8$

1. Titik potong dengan sumbu-X syarat y = 0
$-x^2 + 6x - 8 = 0$
$x^2 - 6x + 8 = 0$
$(x - 4)(x - 2) = 0$
$x = 4 \ dan \ x = 2$
Titik potongnya (4, 0) dan (2, 0)
2. Titik potong dengan sumbu-Y syarat $x = 0$
$y = -x^2 + 6x - 8$
$y = 0^2 + 6.0 - 8$
$y = -8$
Titik potongnya (0, –8)
3. Menentukan titik puncak fungsi $y = x^2 - 9$

$$(x_p, y_p) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$$
$$= (\frac{-6}{2(-1)}, -\frac{36 - 4.(-1).(-8)}{4(-1)})$$
$$= (3, 1)$$

4. Gambar daerah penyelesaiannya
(Daerah yang diarsir adalah daerah penyelesaian)

Daerah penyelesaian kedua pertidaksamaan itu adalah irisan dua daerah penyelesaian masing-masing pertidaksamaannya, yakni:

(Skor: 35)

4. Alternatif Penyelesaian:

Sebelum menentukan daerah penyelesaian, buatlah model matematikanya.

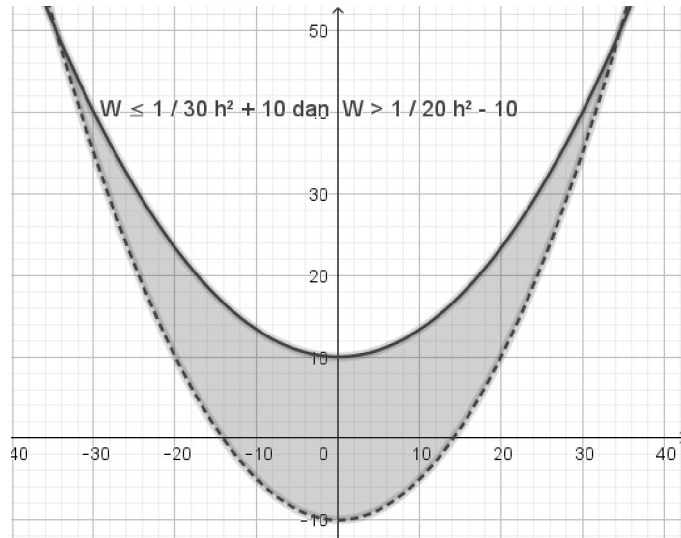
Misalkan: W adalah berat badan ideal (dalam kg)
h adalah tinggi badan (dalam cm)

SPtDVKK nya adalah sebagai berikut.

$$\begin{cases} W \leq \dfrac{1}{30}h^2 + 10 \\ W > \dfrac{1}{20}h^2 - 10 \end{cases}$$

Selanjutnya buatlah gambar daerah penyelesaian dari SPtDVKK

$$\begin{cases} W \leq \dfrac{1}{30}h^2 + 10 \\ W > \dfrac{1}{20}h^2 - 10 \end{cases}$$

Daerah penyelesaian kedua pertidaksamaan itu adalah irisan dua daerah penyelesaian masing-masing pertidaksamaannya, yakni:

(Skor: 35)

Menurut kalian masalah ini berkaitan dengan profesi apa dalam kehidupan sehari-hari? Jika kalian memiliki profesi tersebut informasi di atas berguna untuk apa? Tuliskan jawabanmu di dalam buku catatan, sebagai motivasi untuk mempelajari materi SPtDVKK.

Nilai Latihan soal ini adalah: Jumlah semua skor yang diperoleh di setiap nomor.

E. Penilaian Diri

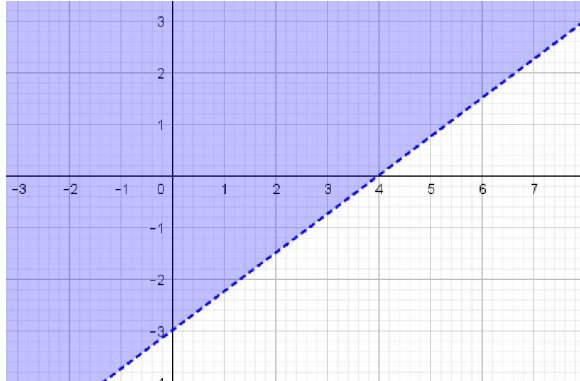
Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan jujur dan bertanggungjawab!

No.	Pertanyaan	Jawaban	
1	Apakah Saya telah memahami definisi SPtDVKK?	Ya	Tidak
2	Apakah Saya telah memahami memahami bentuk umum SPtDVKK?	Ya	Tidak
3	Apakah Saya dapat menentukan daerah penyelesaian PtKDV?	Ya	Tidak
4	Apakah Saya dapat menentukan daerah penyelesaian SPtDVLK?	Ya	Tidak

Bila ada jawaban "Tidak", maka segeralah kalian lakukan review pembelajaran, terutama pada bagian yang masih "Tidak"

EVALUASI

Pilihlah satu jawaban yang paling benar.

1. Perhatikan gambar berikut.

Daerah yang diarsir pada gambar di atas merupakan daerah penyelesaian pertidaksamaan… .

A. $4y > 3x - 12$
B. $4y < 3x - 12$
C. $4y \geq 3x - 12$
D. $4y \geq 3x + 12$
E. $4y > 3x + 12$

2. Salah satu penyelesaian dari pertidaksamaan $2y > 6x - 12$ adalah

A. (3, 1)
B. (2, 1)
C. (1, – 4)
D. (2, – 1)
E. (3, – 1)

3. Di antara pertidaksamaan-pertidaksamaan berikut, yang merupakan pertidaksamaan kuadrat dua variabel adalah… .

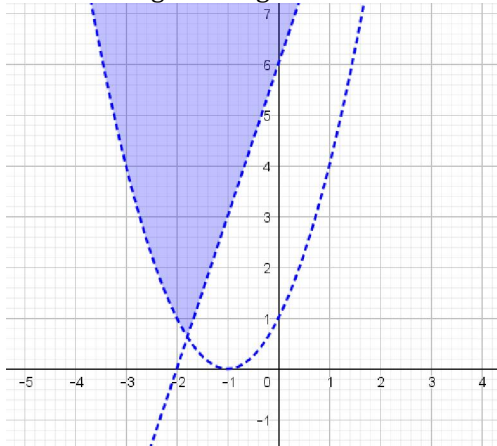
A. $y < 2x - 3$
B. $|x|^2 - 3 > y$
C. $y < 3x^2 - 6$
D. $x^2 + y^2 - 1 > 0$
E. $x^2 + y^3 - 5 > 0$

4. Koordinat titik berikut merupakan penyelesaian dari pertidaksamaan $2y < x^2 - 4$, kecuali… .

A. (0, – 4)
B. (– 4, 0)
C. (1, 1)
D. (0, – 3)
E. (1, – 2)

5. Berikut adalah salah satu koordinat titik yang merupakan penyelesaian dari $y < 2x^2 - 3x - 5$… .

A. (0, 0)
B. (– 1, 0)
C. (4, – 1)
D. (2, 2)
E. (0, 2)

6. Cermati dengan baik gambar berikut.

Daerah yang diarsir pada gambar di atas merupakan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan… .

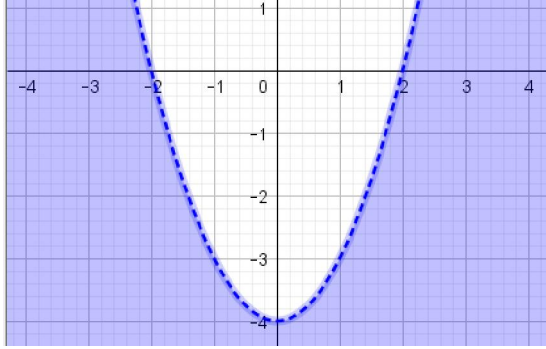
A. $y \geq 3x + 6$ dan $y < x^2 + 2x + 1$
B. $y > 3x + 6$ dan $y < x^2 + 2x + 1$
C. $y < 3x + 6$ dan $y < x^2 + 2x + 1$
D. $y > 3x + 6$ dan $y > x^2 + 2x + 1$
E. $y < 3x + 6$ dan $y > x^2 + 2x + 1$

7. Ketika menggambar daerah penyelesaian pertidaksamaan $2y \leq 4x^2 - 1$, Andi mengambil sebuah titik uji. Di akhir tahap menggambar, Andi mendapati daerah yang memuat titik uji tersebut tidak ikut terarsir. Koordinat yang mungkin menjadi titik uji Andi adalah… .

A. (0, – 2)
B. (0, – 2)
C. (4, 0)
D. (0, 5)
E. (1, 1)

8. Sebuah penelitian menunjukkan bahwa pengemudi berusia lebih dari 17 tahun dan kurang dari 60 tahun memiliki waktu reaksi terhadap rangsangan audio sebesar y = A(x) dan waktu reaksinya terhadap rangsangan visual sebesar y = V (x) (keduanya dalam milidetik) yang dapat dimodelkan dengan $V(x) \leq -0.0002x^2 - 0.13x + 11$ dan $A(x) \leq 0.001x^2 - 0.01x + 10$; dimana x adalah usia (dalam tahun) dari pengemudi. Tentukan kesimpulan berikut yang tepat berdasarkan model tersebut.

A. Pengemudi dengan usia 25 tahun akan bereaksi lebih cepat terhadap lampu lalulintas yang berubah dari hijau menjadi kuning dibandingkan ke sirene ambulansyang mendekat.
B. Pengemudi dengan usia 35 tahun akan bereaksi lebih cepat terhadap lampu lalulintas yang berubah dari hijau menjadi kuning dibandingkan ke sirene ambulansyang mendekat.
C. Pengemudi dengan usia 40 tahun akan bereaksi lebih cepat terhadap sireneambulans yang mendekat dibandingkan ke lampu lalu lintas yang berubah dari hijaumenjadi kuning.
D. Pengemudi dengan usia 45 tahun akan bereaksi sama cepat lampu lalu lintas yangberubah dari hijau menjadi kuning dibandingkan ke sirene ambulans yangmendekat.
E. Pengemudi dengan usia 55 tahun akan bereaksi lebih cepat terhadap lampu lalulintas yang berubah dari hijau menjadi kuning dibandingkan ke sirene ambulansyang mendekat.

9. Perhatikan gambar berikut dengan cermat.

Daerah yang ditunjukkan pada gambar di atas merupakan daerah penyelesaian pertidaksamaan… .

A. $2y < x^2 - 4$
B. $2y > x^2 - 4$
C. $2y < x^2 + 4$
D. $2y > x^2 + 4$
E. $2y \leq x^2 - 4$

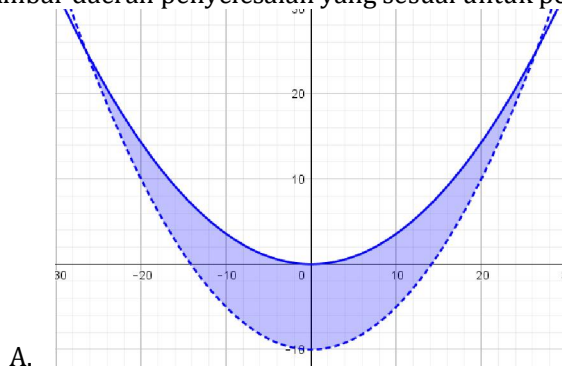
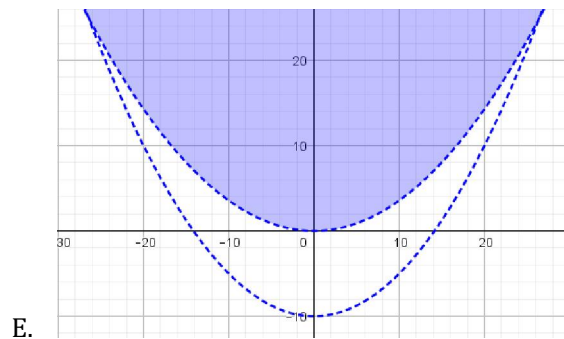
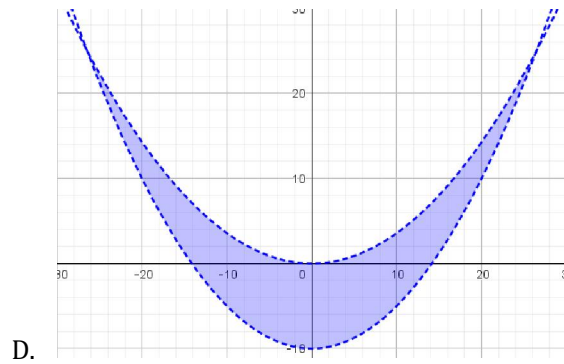
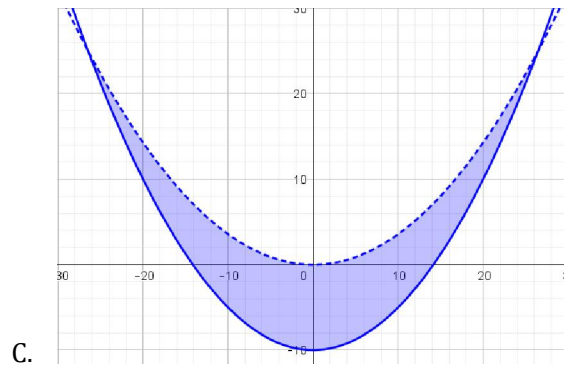
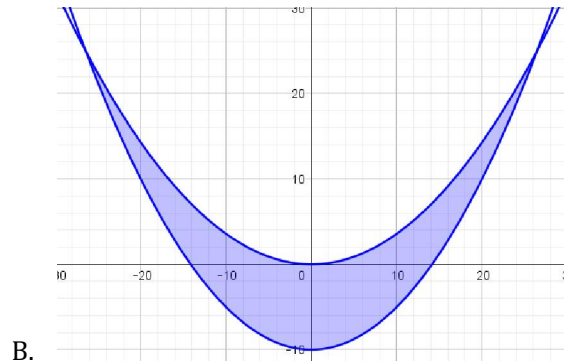
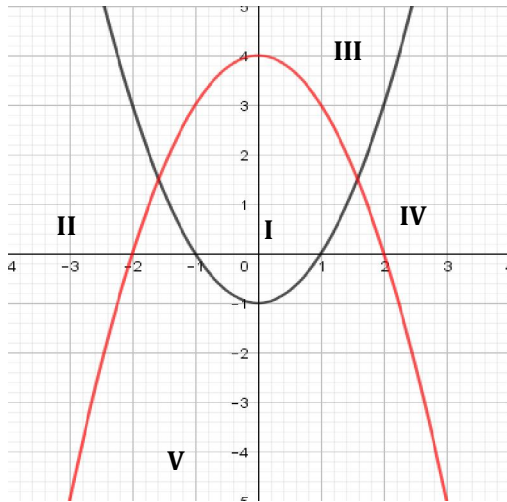
10. Dua bilangan memiliki hubungan sebagai berikut. Selisih dua kali bilangan pertama dan kedua selalu lebih besar dari 12. Bilangan kedua selalu lebih besar atau sama dengan kuadrat bilangan pertama dikurangi dua kali bilangan pertama dikurangi delapan. Sistem pertidaksamaan dua variabel linear-kuadrat yang sesuai untuk permasalahan tersebut adalah… .

A. $2x - 3y < 12$ dan $y > x^2 - 2x - 8$
B. $2x - 3y > 12$ dan $y > x^2 - 2x - 8$
C. $2x - 3y < 12$ dan $y \leq x^2 - 2x - 8$
D. $2x - 3y > 12$ dan $y \geq x^2 - 2x - 8$
E. $2x - 3y \leq 12$ dan $y > x^2 - 2x - 8$

11. Sebuah tali dapat menarik beban seberat W (dalam kg). Pada saat-saat tertentu nilai W memenuhi kondisi kurang dari hasil perkalian dari 3 dengan kuadrat diameter (d) tali tersebut (d dalam cm). Salah satu titik yang memenuhi kondisi tersebut adalah… .

A. (1, 6)
B. (1, 5)
C. (1, 4)
D. (1, 3)
E. (1, 2)

12. Berat badan ideal seseorang bergantung pada tinggi badannya. Seseorang dikatakan memiliki berat badan ideal jika berat badan (W dalam kg) orang tersebut kurang dari atau sama dengan 1/28 kali kuadrat tinggi badan (h dalam cm) orang tersebut dan berat badan lebih dari 1/20 kali kuadrat tinggi badan orang tersebut dikurangi 10. Gambar daerah penyelesaian yang sesuai untuk permasalahan tersebut adalah… .

A.

13. Daerah yang merupakan penyelesaian sistem pertidaksamaan $\begin{cases} y \geq x^2 - 1 \\ y \leq 4 - x^2 \end{cases}$ ditunjukkan oleh daerah … pada gambar di bawah ini.

A. V
B. IV
C. III
D. II
E. I

14. Sistem pertidaksamaan yang tidak memiliki daerah penyelesaian adalah… .
    A. $\begin{cases} y \geq x^2 - 9 \\ y \leq 9 - x^2 \end{cases}$
    B. $\begin{cases} y \geq -x^2 - 2x + 8 \\ y \leq 4 - x^2 \end{cases}$
    C. $\begin{cases} y \geq -x^2 + 3 \\ y \leq 2x^2 \end{cases}$
    D. $\begin{cases} y \geq 2x^2 + 8 \\ y \leq -4 - x^2 \end{cases}$
    E. $\begin{cases} y \geq x^2 - x - 2 \\ y \leq -x^2 + x + 2 \end{cases}$

15. Usia Anto dan Hari memenuhi kondisi berikut. Dua kali usia Anto bernilai lebih besar dibandingkan kuadrat usia Anto ditambah usia Hari. Usia Hari lebih besar dari kuadrat usia Anto dikurangi tiga kali usia Anto. Sistem pertidaksamaan yang memenuhi kondisi tersebut adalah… .
    A. $\begin{cases} y \geq x^2 - 3x \\ 2 - x^2 \leq y \end{cases}$
    B. $\begin{cases} 2x - x^2 > y \\ y > x^2 - 3x \end{cases}$
    C. $\begin{cases} y > x^2 - 3x \\ 2 - x^2 \leq y \end{cases}$
    D. $\begin{cases} 2x - x^2 < y \\ y > x^2 - 3x \end{cases}$
    E. $\begin{cases} 2x - x^2 > y \\ y < x^2 - 3x \end{cases}$

KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. A
2. B
3. C
4. C
5. C
6. D
7. D
8. E
9. A
10. D
11. E
12. A
13. E
14. D
15. B

Nilai Latihan soal ini adalah: $\frac{Jumlah\ jawaban\ benar}{15} x\ 100$

KRITERIA PINDAH MODUL

Peserta didik dinyatakan memahami modul ini atau dapat berpindah ke modul berikutnya apabila telah memenuhi salah satu persyaratan berikut.

1. Mampu mengerjakan soal latihan secara lengkap, benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, dengan hasil minimal 75%.
2. Mampu mengerjakan evaluasi untuk modul ini dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, dengan hasil minimal 75%.

Peserta didik dinyatakan belum memahami dan menguasai modul ini serta belum dapat berpindah ke modul berikutnya apabila:

1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan dengan hasil di bawah 75%.
2. Mengerjakan evaluasi dengan hasil di bawah 75%.

DAFTAR PUSTAKA

Yuana, R. A., Indriyastuti. 2017. *Perspektif Matematika 1 untuk Kelas X SMA dan MA Kelompok Mata Pelajaran Wajib*. Solo: PT. Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.

Sinaga, Bornok, dkk. 2017. Matematika SMA/MA/SMK/MAK Untuk Kelas X. Jakarta: Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan.

https://smazapo.sch.id/UKBM/ . 2020. Diakses tanggal 16 September 2020.

https://www.materimatematika.com/2017/11/sistem-pertidaksamaan-linier-dan-kuadrat.html. 2017. Diakses tanggal 19 September 2020.